Hertentamen 1 Complexe Analyse Oude Stijl
31/01/08, 14.00–17.00 uur

1. Toon aan dat de functie $f(z)$, gedefinieerd door
$$f(z) = \frac{z^3}{e^{z^2} - 1}, \quad z \neq 0,$$
een ophefbare singulariteit bezit in $z = 0$. Bepaal de convergentiestraal van de bijbehorende reeksontwikkeling rond $z = 0$.

2. Beschouw de functie $f(z) = e^z$ op
$$A = \{\, z = x + iy \in \mathbb{C} : \ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \,\}.$$
Volgens welke stelling(en) heeft $|f(z)|$ een maximum op A? Noem dat maximum M. Volgens welke stelling(en) is $|f(z)| < M$ voor de punten $z \in A$ die niet op de rand van A liggen? Bereken M.

3. Bepaal met behulp van residuenrekening de integraal
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\cos\theta}\, d\theta.$$
Aanwijzing: Gebruik de substitutie $z = e^{i\theta}$.

4. Beschouw de (Fourier-)integraal
$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\, e^{-i\omega x}\, dx, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$
   (a) Laat zien dat de functie $G(\omega)$ reëel en even is.
   (b) Bereken $G(\omega)$ voor $\omega \leq 0$ via residuenrekening.
   Aanwijzing: laat zien en gebruik dat $|e^{-i\omega z}| \leq 1$ als $\operatorname{Im} z \geq 0$.
   (c) Bepaal $G(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

5. Is de functie $f(z) = |z^2 - z|$, $z = x + iy$, differentieerbaar?

6. Bepaal de afgeleide van de 'principal branch' van z^{1+i} in $z = i$.